Μαθηματική πρόταση είναι μια γραμμική ~~προφορική~~ πρόταση όπου υπάρχουν μεταβλητές κ' ανάλογα με την τιμή που λαμβάνει η μεταβλητή αναγνωρίζουμε αν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής

π.χ. $\forall x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ ψευδής. Πρέπει απαραίτητα να ορίσουμε τα σύνολα από τα οποία λαμβάνουν τιμές οι μεταβλητές

Για $x, y \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ Αληθής

2) Για $x \in \mathbb{R}$ $|x| > 0$ ψευδής

Για $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ αληθής

Πώς αποδεικνύουμε μαθηματικές προτάσεις

1) Γράφουμε την πρόταση την οποία θέλουμε να αποδείξουμε καθαρά, ώστε να είναι εύκολα αναγνώσιμη κ' σύντομη, χωρίς επαναλήψεις κ' ασάφειες

2) Η απόδειξη θα στηρίζεται σε αρχικές προτάσεις με αλήθεια δικαιολογημένη δηλαδή δεν θα χρησιμοποιούνται μαθηματικές ασάφειες. Αν υπάρχουν μεταβλητές θα τις ορίσουμε από την αρχή, δηλαδή θα ορίσουμε τα σύνολα τα οποία λαμβάνουν τιμές

Π.χ. Έστω m κ' n ακέραιοι

3) Αν κάποια μεταβλητή έχει κάποια επιπλέον ιδιότητα, την αναφέρουμε.

Π.χ. Ο n είναι ακέραιος ($n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$ κ' άρτιος. $n = 2k$ όπου k είναι ακέραιος)

ΠΡΟΣΟΧΗ χρησιμοποιούμε π.χ. για να αντιληφθούμε την πρόταση καλύτερα. Δεν αποδεικνύουμε με π.χ.

Π.χ. Το άθροισμα άρτιων είναι άρτιος

Έστω m κ' n να είναι άρτιοι $= \{0, \pm 2, \pm 4 \dots\}$

Άρα $m = 2k$ $n = 2l$, $k, l \in \mathbb{Z}$

Θέλουμε $m + n =$ άρτιος

$2k + 2l = 2(k + l)$ άρτιος

Δεν χρησιμοποιούμε το ίδιο γράμμα για να δηλώσουμε διαφορετικές μεταβλητές. Δεν παραλείπουμε βήματα στην απόδειξη, ακόμη και αν είναι προφανή. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε ισοδύναμα την πρόταση μας για να μας βοηθήσει στην απόδειξη.

Προσοχή με το "εάν". Το "εάν" είναι διαφορετικό από το "επειδή" κ' το "ώστε"

Π.χ. Έστω p πρώτος αριθμός. ~~Αν~~ επειδή ο p είναι πρώτος δεν μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο μικρότερων φυσικών $\quad p = ab$ με $ab \neq 1$

(πρώτος αριθμός = διαιρείται μόνο από τον εαυτό του κ' το 1)

Αντιπαράδειγμα

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια πρόταση δεν είναι αληθής αρκεί να βρούμε αντιπαράδειγμα

Π.χ. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $a^2 = b^2$ τότε $a = b$ κ' $a = b = 1$ Ψευδής

Προσοχή στις συνεπαγωγές

Π.χ. 1) Αν το 4686 διαιρείται με το 6 $\Rightarrow$ τότε διαιρείται κ' με το 3

Επειδή 4686 διαιρείται με το 6 γράφεται $4686 = 6k = 2\,3k$

$4686 = 3k'$

2) Ο Μεχαγιάς έρχεται με μεγάλη βαλίτσα, άρα έχει πολλά ρούχα. Ψευδής

Το αντίστροφο ισχύει.

3) Ο αστυφύλακας είναι όργανο

Το μπουζούκι είναι όργανο $\quad$ Ψευδής

Άρα ο αστυφύλακας είναι μπουζούκι

4) Αν έχω όρεξη για δουλειά τη Δευτέρα θα σε προσλάβουμε

5) Αν σήμερα είναι Πάσχα, τότε αύριο είναι Δευτέρα.

Αν σήμερα δεν είναι Δευτέρα, τότε χθες δεν ήταν Πάσχα

$A = \{\text{σύνολο}\}$ Πράξεις στο σύνολο

Π.χ 1) $A = \{1, 2, 3\}$ $+$ δεν είναι καλά ορισμένη η πράξη

Ορισμός:

Πράξη σε ένα σύνολο A είναι μια απεικόνιση $\oplus : A \times A \to A$, $(a, b) \to a \oplus b$

$A = \{1,2,3\}$

$\oplus \quad A \times A \to A$

$(x,y) \to 1$

$1 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus 2 = 1$

$1 \oplus 3 = 1$

$2 \oplus 3 = 1$

πολλαπλασιασμός

$\mathbb{N} = \{0,1,2..\}$ +, ·

$\cap$ $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$ + αναδιαμορφώνεται

· όχι ακόμη

$\cap$

$\mathbb{Q} = \{$ρητοί $\frac{p}{q}$, $q \neq 0\}$ · καλά, + καλά

$(p,q)=1$ πρώτοι μεταξύ τους

$\cap$

$\mathbb{R}$ πραγματικοί

$x^2+1=0$ $\mathbb{C}$

$(\mathbb{R},+)$ καλά ορισμένη

$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ προσεταιριστική

0 ουδέτερο

αντίθετο του α είναι το −α

κ' ισχύει $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ για όλους τους πραγματικούς

προϋποθέσεις για αβελιανή ομάδα

Με αυτές τις ιδιότητες το $(\mathbb{R},+)$ γίνεται αβελιανή ομάδα → Abelian group

$(\mathbb{R}^*,\cdot)$ αβελιανή ομάδα

$\mathbb{R}-\{0\}$

Οι δύο αυτές πράξεις συνδέονται μεταξύ τους (με την επιμεριστική)

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\gamma\alpha$

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ σώμα field

Ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη ($\oplus$ $G\times G \to G$), καλείται αβελιανή ομάδα αν ισχύει:

(i) $\forall a,b \in G$ $(a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$, προσεταιριστική ιδιότητα

(ii) $\exists e \in G$ ώστε $a\oplus e = e\oplus a = a$ $\forall a\in G$. Το e ονομάζεται ουδέτερο στοιχείο.

(iii) $\forall a\in G$ $\exists b\in G$ ώστε $a\oplus b = e = b\oplus a$

(iv) $\forall a,b\in G$ $a\oplus b = b\oplus a$

π.χ $(\mathbb{Z},+)$ αβελιανή ομάδα

$(\mathbb{Q},+)$ -||-

$(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ -||-

$(\mathbb{R},+)$ -||-

$(\mathbb{R}^*,\cdot)$ -||-

Ένα σύνολο F εφοδιασμένο με δύο πράξεις ($\oplus$ $F\times F$, $\odot$ $F\times F\to F$), ώστε:

(i) το $(F,\oplus)$ να είναι αβελιανή ομάδα

(ii) το $F-\{$ουδέτερο στοιχείο$\}$ αποτελεί αβελιανή ομάδα

(iii) $\forall a,b,c\in F$ ισχύει $a\odot(b\oplus c) = a\odot b\oplus a\odot c$ η επιμεριστική ιδιότητα.

Τότε το F με αυτές τις δύο πράξεις καλείται σώμα.

π.χ $\mathbb{Q}$ σώμα, $\mathbb{R}$ σώμα, $\mathbb{C}$ σώμα.